

“数楽”で“音楽”しよう

音の高さは、空気の振動数で決まる。1秒間に1回振動することを1Hz（ヘルツ）というが、楽器の音程は440Hzが基礎になっていて、ラ(A)の音に対応している。振動数が2倍になっている音を1オクターブ高い音という。440Hzの1オクターブ高い音は、振動数が $440 \times 2 = 880\text{Hz}$ の音で、2オクターブ高い音は、振動数が $440 \times 4 = 1760\text{Hz}$ の音である。一般に、 n オクターブ高い音は、振動数が 2^n 倍になっており、オクターブ音の高さは、加法的でなく乗法的に振動数が増える。

弦の長さと言音の高さにおいて、ある長さの弦が出す音と、その長さが半分の弦が出す音はきれいに協和して、長さが半分の弦が出す音は、もとの弦が出す音より1オクターブ高い。つまり、振動数が2倍になっている。また、弦の長さをもとの長さの $\frac{2}{3}$ にすると、もとの音と協和する。これが5度の音程である。

ピタゴラスは、この $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{3}$ の弦の長さを基準にして、現在のピタゴラス音階を作った。長さ1の弦の音を「ド」とすると、長さ $\frac{1}{2}l$ の弦の音は1オクターブ（8度）高い「ド」である。長さ $\frac{2}{3}l$ の音は5度高い「ソ」である。この $l, \frac{2}{3}l, \frac{1}{2}l$ は調和数列（逆数が等差数列）になっている。

1オクターブ高いドを5度下げると「ファ」（長さは $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}l = \frac{3}{4}l$ ）、ソを5度上げて1オクターブ下げると「レ」（長さは $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 2l = \frac{8}{9}l$ ）である。レを5度あげると「ラ」（長さは $\frac{8}{9} \times \frac{2}{3}l = \frac{16}{27}l$ ）で、ラを5度上げて1オクターブ下げると「ミ」（長さは $\frac{16}{27} \times \frac{2}{3} \times 2l = \frac{64}{81}l$ ）である。ミを5度上げると「シ」（長さは $\frac{128}{243}l$ ）となる。

振動数(弦の長さの逆数)の比は、ピタゴラス音階では次の表Iのようにになっている。

表 I

音階	ド(C)	レ(D)	ミ(E)	ファ(F)	ソ(G)	ラ(A)	シ(B)	ド(C)
振動数(比)	1	$\frac{9}{8}$ =1.125	$\frac{81}{64}$ ≐1.266	$\frac{4}{3}$ ≐1.333	$\frac{3}{2}$ =1.5	$\frac{27}{16}$ ≐1.688	$\frac{243}{128}$ ≐1.898	2

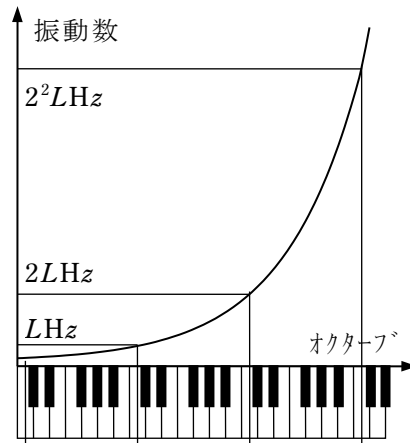
ピタゴラス音階は、ドとミの3度の音が完全には協和しない。協和する弦の長さは $\frac{4}{5}$ 倍でなければならない。この3度の音を含みよく協和する音程が純正調音階であり、次の表IIのようにになっている。

表 II

音階	ド(C)	レ(D)	ミ(E)	ファ(F)	ソ(G)	ラ(A)	シ(B)	ド(C)
振動数(比)	1	$\frac{9}{8}$ =1.125	$\frac{5}{4}$ =1.25	$\frac{4}{3}$ ≐1.333	$\frac{3}{2}$ =1.5	$\frac{5}{3}$ ≐1.667	$\frac{15}{8}$ =1.875	2

ピアノなど通常の楽器に使われている平均律による音階は、1 オクターブを 12 等分している。弦の長さでは、12 等分になるが、振動数では乗法的に 12 等分する、すなわち、12 乗根のベキをとることになる。1 オクターブに 7 個の白鍵と 5 個の黒鍵があり、半音ずつ 12 回上がっていくから、平均律による音階は、次の表Ⅲのようになる。

平均律の音階では、5 度の音程は、振動数の比が $\sqrt[12]{2^7} \approx \frac{3}{2}$ となっているために、完全には協和しない。



表Ⅲ

音階	ド(C)	レ(D)	ミ(E)	ファ(F)	ソ(G)	ラ(A)	シ(B)	ド(C)
振動数 (比)	1	$\sqrt[12]{2}$ ≈ 1.122	$\sqrt[12]{2^2}$ ≈ 1.260	$\sqrt[12]{2^3}$ ≈ 1.335	$\sqrt[12]{2^4}$ ≈ 1.498	$\sqrt[12]{2^5}$ ≈ 1.682	$\sqrt[12]{2^6}$ ≈ 1.888	2

(参考 数学セミナー2000年7月号(日本評論社))